10 MIN VWL

Elastizitäten: Verstehen, Zeichnen, Rechnen

Aufgaben (Lösungen ab Seite 3)

1. **Bogenelastizität:**
Manuela überlebt die Klausurvorbereitung nur mit großen Mengen an Kaffee. Bei einem Preis in Höhe von P Euro pro Tasse beträgt ihre tägliche Kaffeenachfrage

$$X \quad = \quad 8 - 0,5P$$

   (a) Stelle die Kaffeenachfrage von Manuela in einer Abbildung dar.

   (b) Berechne die Kaffeenachfrage bei einem Preis von $P = 4$ Euro.

   (c) Nun steigt der Kaffeepreis auf $P = 6$ Euro. Wie hoch ist nun die Kaffeenachfrage von Manuela? Gib auch die prozentuale Änderung von Preis und Menge an. Verwende dabei $P = 4$ als Startpunkt.

   (d) Berechne die Preiselastizität der Nachfrage für den Preisanstieg um 2 Euro, d.h. mit $P = 4$ als Ausgangspunkt, mit der Formel der Bogenelastizität.

   (e) Berechne erneut die Preiselastizität der Nachfrage mit Hilfe der Bogenelastizität. Betrachte nun aber stattdessen einen Preisrückgang von $P = 6$ auf $P = 4$.

   (f) Berechne ein letztes Mal die Bogenelastizität. Verwende nun aber anstelle des Startpunktes aus (d) oder des Endpunktes aus (e) die Mitte zwischen beiden Punkten. Die prozentuale Änderung des Preises beträgt nun also $\frac{\Delta P}{0,5 \cdot (4+6)}$. Berechne mit dieser Methode zunächst einen Zahlenwert für die prozentuale Mengenänderung und für die prozentuale Preisänderung, bevor Du die Elastizität berechnest.

2. **Punktelastizität:**
   Auch Patrick lernt für die Klausur. Seine Nachfrage nach beruhigendem Tee kann durch die Gleichung
   $$P = 10 - 0,1X$$
   beschrieben werden, wobei P den Preis einer Tasse Tee und X die nachgefragte Teemenge pro Woche bezeichnet.

   (a) Berechne die Preiselastizität seiner Nachfrage mit der Punktelastizität, wobei Du keine Zahlen für P oder X einsetzen solltest.

   (b) Bei welchem Preis wären seine gesamten Ausgaben für Kaffee maximal?

3. **Einkommenselastizität der Nachfrage:**
   Donald lernt ebenfalls auf die Mikro-Klausur. Er trinkt gerne RedBull und hat die Nachfragefunktion
   $$X = \frac{E}{2P}. \tag{1}$$
   Dabei ist X die nachgefragte Menge an Redbull pro Monat und P der Preis einer Dose in Euro. Zusätzlich hängt seine Nachfrage noch von seinem Monatseinkommen E ab.

   (a) Berechne die Preiselastizität der Nachfrage mit der Punktelastizität, ohne Zahlen für X, P oder E einzusetzen. Wie hoch ist die Preiselastizität bei einem Preis von $P = 5$ und einem Einkommen von $E = 1000$?

   (b) Berechne die Einkommenselastizität der Nachfrage mit der Punktelastizität, ohne Zahlen für X, P oder E einzusetzen. Falls Du nicht sicher bist, wie die Einkommenselastizität berechnet wird, sieh Dir das Ende der Youtube-Zusammenfassung an:

   YouTube

   (c) Aufgrund ungünstiger Entwicklungen fällt das Einkommen von Donald um 80%. Wie stark geht gemäß der Einkommenselastizität seine Nachfrage zurück, falls der Preis sich nicht ändert?

Lösungen

1. **Bogenelastizität:**
Manuela überlebt die Klausurvorbereitung nur mit großen Mengen an Kaffee. Bei einem Preis in Höhe von P Euro pro Tasse beträgt ihre tägliche Kaffeenachfrage

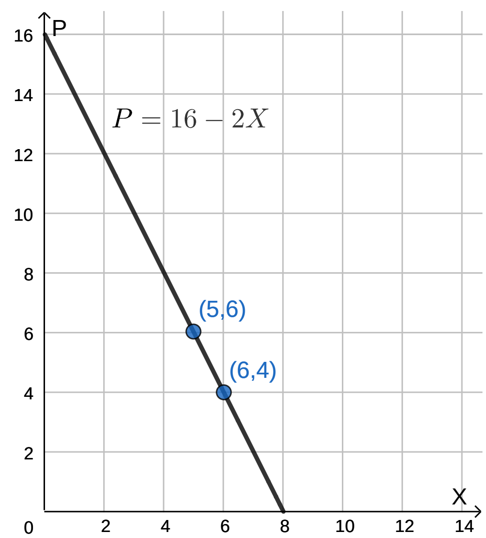
$$X = 8 - 0,5P \tag{2}$$

(a) Stelle die Kaffeenachfrage von Manuela in einer Abbildung dar.

Lösung:
Zum Zeichnen lösen wir die Nachfrage zunächst nach P auf, da wir den Preis an der vertikalen Achse abtragen möchten:

$$X = 8 - 0,5P \tag{3}$$
$$P = 16 - 2X \tag{4}$$

Die Nachfrage ist also eine Gerade mit P-Achsenabschnitt $P = 16$ und der Steigung -2:



(b) Berechne die Kaffeenachfrage bei einem Preis von $P = 4$ Euro.

Lösung:
Bei einem Preis von $P = 4$ beträgt die Nachfrage $X = 8 - 0,5P = 8 - 0,5 \cdot 4 = 6$ Tassen pro Tag.

(c) Nun steigt der Kaffeepreis auf $P = 6$ Euro. Wie hoch ist nun die Kaffeenachfrage von Manuela? Gib auch die prozentuale Änderung von Preis und Menge an. Verwende dabei $P = 4$ als Startpunkt.

Lösung:
Bei einem Preis von $P = 6$ beträgt die Nachfrage $X = 8 - 0,5P = 8 - 0,5 \cdot 6 = 5$ Tassen pro Tag. Daher gilt

$$\begin{aligned} \text{Mengenänderung in \%} &= \frac{\Delta X}{X} = \frac{5-6}{6} = -\frac{1}{6} \quad (5) \\ \text{Preisänderung in \%} &= \frac{\Delta P}{P} = \frac{6-4}{4} = \frac{1}{2} \quad (6) \end{aligned}$$

(d) Berechne die Preiselastizität der Nachfrage für den Preisanstieg um 2 Euro, d.h. mit $P = 4$ als Startpunkt, mit der Formel der Bogenelastizität.

Lösung:
Wir kennen aus der vorherigen Teilaufgabe schon die prozentualen Veränderungen, sodass wir diese für die Elastizität nur noch durcheinander dividieren müssen:

$$\varepsilon_{X,P} = \frac{\text{Mengenänderung in \%}}{\text{Preisanstieg in \%}} = \frac{\Delta X / X}{\Delta P / P} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3} \approx -0,33 \quad (7)$$

(e) Berechne erneut die Preiselastizität der Nachfrage mit Hilfe der Bogenelastizität. Betrachte nun aber stattdessen einen Preisrückgang von $P = 6$ auf $P = 4$.?

Lösung:
Wir berechnen die prozentualen Änderungen wie in Teilaufgabe (c), vertauschen nun aber Start- und Endpunkt:

$$\begin{aligned} \text{Mengenänderung in \%} &= \frac{\Delta X}{X} = \frac{6-5}{5} = \frac{1}{5} \quad (8) \\ \text{Preisänderung in \%} &= \frac{\Delta P}{P} = \frac{4-6}{6} = -\frac{1}{3} \quad (9) \end{aligned}$$

Somit beträgt die Elastizität in diesem Fall

$$\varepsilon_{X,P} = \frac{\text{Mengenänderung in \%}}{\text{Preisanstieg in \%}} = \frac{\Delta X / X}{\Delta P / P} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{5} = -0,6 \quad (10)$$

(f) Berechne ein letztes Mal die Bogenelastizität. Verwende nun aber anstelle des Startpunktes aus (d) oder des Endpunktes aus (e) die Mitte zwischen beiden Punkten. Die prozentuale Änderung des Preises beträgt nun also $\frac{\Delta P}{0,5 \cdot (4+6)}$. Berechne mit dieser Methode zunächst einen Zahlenwert für die prozentuale Mengenänderung und für die prozentuale Preisänderung, bevor Du die Elastizität berechnest. Es ist hierbei egal, welchen Punkt Du als Startpunkt wählst!

Lösung:
Wir wählen hier $X = 6$ und $P = 4$ als Startpunkt. Nun verwenden wir die oben vorgeschlagene Formel, um die prozentualen Änderungen zu berechnen:

$$\begin{aligned} \text{Mengenänderung in \%} &= \frac{\Delta X}{X} = \frac{5-6}{0,5 \cdot (6+5)} = -\frac{1}{5,5} = -\frac{2}{11} && (11) \\ \text{Preisänderung in \%} &= \frac{\Delta P}{P} = \frac{2}{0,5 \cdot (4+6)} = \frac{2}{5} && (12) \end{aligned}$$

Wir setzen ein letztes Mal ein:

$$\varepsilon_{X,P} = \frac{\text{Mengenänderung in \%}}{\text{Preisanstieg in \%}} = \frac{\Delta X / X}{\Delta P / P} = \frac{-\frac{2}{11}}{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{11} = -0,45 \quad (13)$$

Wir sehen, dass die Elastizität mit dieser Methode zwischen den Elastizitäten mit aus (d) und (e) liegt. Dies ist wenig überraschend, weil wir in dieser Teilaufgabe den Durchschnitt aus dem Anfangs- und Endpunkt verwendet haben, während wir in den beiden anderen Aufgaben jeweils einen Extrempunkt gewählt haben.

2. **Punktelastizität:**
Auch Patrick lernt für die Klausur. Seine Nachfrage nach beruhigendem Tee kann durch die Gleichung

$$P = 10 - 0,1X$$

beschrieben werden, wobei P den Preis einer Tasse Tee und X die nachgefragte Teemenge pro Woche bezeichnet.

(a) Berechne die Preiselastizität seiner Nachfrage mit der Punktelastizität, wobei Du keine Zahlen für P oder X einsetzen solltest.

Lösung:
Wir erinnern uns, dass wir die Punktelastizität der Nachfrage berechnen, indem wir die nachgefragte Menge X nach P ableiten:

$$\varepsilon_{X,P} = \frac{\text{Mengenänderung in \%}}{\text{Preisanstieg in \%}} = \frac{dX}{dP} \cdot \frac{P}{X} \quad (14)$$

Daher müssen wir zunächst unsere inverse, d.h. nach P aufgelöste Nachfrage stattdessen nach X auflösen:

$$\begin{aligned} P &= 10 - 0,1X && (15) \\ X &= 100 - 10P && (16) \end{aligned}$$

Nun können wir die Elastizität mit unserer Formel berechnen:

$$\varepsilon_{X,P} = \frac{dX}{dP} \cdot \frac{P}{X} = -10 \cdot \frac{P}{100 - 10P} = -\frac{P}{10 - P} \quad (17)$$

(b) Bei welchem Preis wären seine gesamten Ausgaben für Kaffee maximal?

Lösung:
Zum einen sehen wir, dass die Preiselastizität (absolut) mit dem Preis P zunimmt: Wenn P steigt, wird der Zähler größer und der Nenner kleiner, sodass der ganze Bruch zunimmt. Nun betrachten wir Patricks gesamte Ausgaben, die dem Produkt aus nachgefragter Menge und Preis, $P \cdot X$, entsprechen. Nun beginnen wir mit einem sehr hohen Preis, und damit einer sehr hohen (absoluten) Preiselastizität. Wenn die Preiselastizität sehr hoch ist, führt ein Rückgang des Preises P um 1% zu einer sehr starken Erhöhung der Nachfrage, sodass seine Ausgaben $P \cdot X$ insgesamt steigen. Je weiter wir jedoch den Preis senken, desto kleiner wird die Elastizität, und desto schwächer wird somit dieser Effekt. Bei einer Preiselastizität von exakt 1 führt ein Rückgang des Preises um 1% exakt um einen Anstieg der Nachfrage um ebenfalls 1%, sodass seine Ausgaben unverändert bleiben. Wenn die Preiselastizität dagegen kleiner als 1 ist, dann führt ein Preisrückgang um 1% zu einem Nachfrageanstieg von weniger als 1%, sodass seine gesamten Ausgaben fallen.

Wenn wir die Ausgaben maximieren wollen, müssen wir also überprüfen, wo die Elastizität genau -1 beträgt!

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{X,P} = -\frac{P}{10-P} &= -1 && (18)\\
P &= 10 - P && (19)\\
2P &= 10 && (20)\\
P &= 5 && (21)
\end{aligned}$$

Bei einem Preis von $P = 5$ und einer Nachfrage von $X = 100 - 10P = 100 - 10 \cdot 5 = 50$ sind seine Ausgaben maximal.

3. **Einkommenselastizität der Nachfrage:**
Donald lernt ebenfalls auf die Mikro-Klausur. Er trinkt gerne RedBull und hat die Nachfragefunktion

$$X = \frac{E}{2P}. \tag{22}$$

Dabei ist X die nachgefragte Menge an Redbull pro Monat und P der Preis einer Dose in Euro. Zusätzlich hängt seine Nachfrage noch von seinem Monatseinkommen E ab.

(a) Berechne die Preiselastizität der Nachfrage mit der Punktelastizität, ohne Zahlen für X, P oder E einzusetzen. Wie hoch ist die Preiselastizität bei einem Preis von $P = 5$ und einem Einkommen von $E = 1000$?

Lösung:
Wir können wir die Preiselastizität mit unserer Formel berechnen:

$$\varepsilon_{X,P} = \frac{\text{Mengenänderung in \%}}{\text{Preisanstieg in \%}} = \frac{dX}{dP} \cdot \frac{P}{X} = -\frac{E}{2P^2} \cdot \frac{P}{E/(2P)} = -\frac{E}{2P^2} \cdot \frac{2P^2}{E} = -1 \tag{23}$$

Ein Preisanstieg um 1% führt also genau zu einem Nachfragerückgang von ebenfalls 1%.

(b) Berechne die Einkommenselastizität der Nachfrage mit der Punktelastizität, ohne Zahlen für X, P oder E einzusetzen. Falls Du nicht sicher bist, wie die Einkommenselastizität berechnet wird, sieh Dir das Ende der Youtube-Zusammenfassung an:

YouTube

Lösung:
Wir können den Effekt eines 1-prozentigen Einkommensanstiegs auf die Nachfrage berechnen, indem wir die Nachfrage X nach dem Einkommen E ableiten und dann mit E/X multiplizieren:

$$\varepsilon_{X,E} = \frac{\text{Nachfrageänderung in \%}}{\text{Einkommensanstieg in \%}} = \frac{dX}{dE} \cdot \frac{E}{X} = \frac{1}{2P} \cdot \frac{E}{E/2P} = \frac{1}{2P} \cdot \frac{2P \cdot E}{E} = 1 \tag{24}$$

Die Einkommenselastizität der Nachfrage beträgt also genau 1: Ein Anstieg des Einkommens um 1% erhöht die Nachfrage ebenfalls um 1%.

(c) Aufgrund ungünstiger Entwicklungen fällt das Einkommen von Donald um 80%. Wie stark geht gemäß der Einkommenselastizität seine Nachfrage zurück, falls der Preis sich nicht ändert?

Lösung:
Da die Einkommenselastizität der Nachfrage $\varepsilon_{X,E} = 1$ beträgt, führt ein Rückgang des Einkommens um 80% zu einem Nachfragerückgang von ebenfalls 80%.