10 MIN VWL

Nutzenmaximierung mit Lagrange

YouTube

Aufgaben (Lösungen ab Seite 2)

Aufgabe 1:

In der stressigen Prüfungszeit ernährst Du Dich nur von Kaffee (K) und Zigaretten (Z). Dein Nutzen aus dem Konsum der beiden Güter beträgt

$$U(K, Z) = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}} \tag{1}$$

Eine Tasse Kaffee kostet $P_K = 6$ Euro, eine Zigarette kostet $P_Z = 2$ Euro. Dein gesamtes Budget für Kaffee und Zigaretten beträgt $M = 120$ Euro.

(a) Schreibe das Optimierungsproblem formal auf.

(b) Löse die Budgetbeschränkung nach 0 auf.

(c) Stelle die Lagrange-Funktion auf.

(d) Leite die Lagrange-Funktion partiell nach beiden Gütern ab und setze beide Bedingungen gleich 0.

(e) Dividiere beide Gleichungen durcheinander und löse nach einem Gut auf.

(f) Setze das Ergebnis in die Budgetbeschränkung ein und löse nach dem anderen Gut auf.

(g) Setze nun dieses Ergebnis wieder in einen Zwischenschritt ein, um die optimale Menge des fehlenden Gutes zu finden.

Aufgabe 2:

Löse das allgemeine Nutzenmaximierungsproblem für zwei Güter, X und Y, deren Preise P_X und P_Y, das Einkommen M und die Nutzenfunktion

$$U(X, Y) = X^{\alpha} Y^{\beta} \tag{2}$$

Lösungen

Aufgabe 1:
In der stressigen Prüfungszeit ernährst Du Dich nur von Kaffee (K) und Zigaretten (Z). Dein Nutzen aus dem Konsum der beiden Güter beträgt

$$U(K,Z) = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}} \tag{3}$$

Eine Tasse Kaffee kostet $P_K = 6$ Euro, eine Zigarette kostet $P_Z = 2$ Euro. Dein gesamtes Budget für Kaffee und Zigaretten beträgt $M = 120$ Euro.

(a) Schreibe das Optimierungsproblem formal auf.

Lösung:
Finde die Kombination aus K und Z, die den Nutzen maximiert und zugleich die Nebenbedingung erfüllt.

$$\max_{K,Z} U(K,Z) \text{ u.d.Nb } P_K K + P_Z Z = M \tag{4}$$

(b) Löse die Budgetbeschränkung nach 0 auf.

Lösung:

$$\begin{aligned} P_K K + P_Z Z &= M && (5)\\ M - P_K K - P_Z Z &= 0 && (6)\\ 120 - 6K - 2Z &= 0 && (7) \end{aligned}$$

(c) Stelle die Lagrange-Funktion auf.

Lösung:

$$\mathcal{L} = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}} + \lambda \cdot (120 - 6K - 2Z) \tag{8}$$

(d) Leite die Lagrange-Funktion partiell nach beiden Gütern ab und setze beide Bedingungen gleich 0.

Lösung:
Partiell ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} &= \frac{1}{4} K^{-\frac{3}{4}} Z^{\frac{3}{4}} - 6\lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} K^{-\frac{3}{4}} Z^{\frac{3}{4}} = 6\lambda && (9)\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z} &= \frac{3}{4} K^{\frac{1}{4}} Z^{-\frac{1}{4}} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} K^{\frac{1}{4}} Z^{-\frac{1}{4}} = 2\lambda && (10) \end{aligned}$$

(e) Dividiere beide Gleichungen durcheinander und löse nach einem Gut auf.

Lösung:

$$\frac{\frac{1}{4}K^{-\frac{3}{4}}Z^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}K^{\frac{1}{4}}Z^{-\frac{1}{4}}} = \frac{6\lambda}{2\lambda} \tag{11}$$

$$\frac{1 \cdot Z^{\frac{3}{4}}Z^{\frac{1}{4}}}{3 \cdot K^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}}} = 3 \tag{12}$$

$$\frac{Z}{3K} = 3 \tag{13}$$

$$Z = 9K \tag{14}$$

(f) Setze das Ergebnis in die Budgetbeschränkung ein und löse nach dem anderen Gut auf.

Lösung:
Budgetbeschränkung:

$$120 - 6K - 2Z = 0 \tag{15}$$

Z aus (14) einsetzen:

$$120 - 6K - 2 \cdot 9K = 0 \tag{16}$$

$$120 = 24K \tag{17}$$

$$K^* = 5 \tag{18}$$

(g) Setze nun dieses Ergebnis wieder in einen Zwischenschritt ein, um die optimale Menge des fehlenden Gutes zu finden.

Lösung:
Wir setzen K^* in (14) ein:

$$Z = 9K \tag{19}$$

$$Z = 9 \cdot 5 \tag{20}$$

$$Z^* = 45 \tag{21}$$

Aufgabe 2:

Löse das allgemeine Nutzenmaximierungsproblem für zwei Güter, X und Y, deren Preise P_X und P_Y, das Einkommen M und die Nutzenfunktion

$$U(X,Y) = X^{\alpha}Y^{\beta} \tag{22}$$

Lösung:

Optimierungsproblem:

$$\max_{X,Y} U(X,Y) \text{ u.d.Nb } P_X X + P_Y Y = M \tag{23}$$

Budgetbeschränkung:

$$P_X X + P_Y Y = M \tag{24}$$

$$M - P_X X - P_Y Y = 0 \tag{25}$$

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = X^{\alpha}Y^{\beta} + \lambda \cdot (M - P_X X - P_Y Y) \tag{26}$$

Lagrange-Funktion ableiten, gleich 0 setzen und umformen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \alpha X^{\alpha-1}Y^{\beta} - \lambda P_X = 0 \Rightarrow \alpha X^{\alpha-1}Y^{\beta} = \lambda P_X \tag{27}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \beta X^{\alpha}Y^{\beta-1} - \lambda P_Y = 0 \Rightarrow \beta X^{\alpha}Y^{\beta-1} = \lambda P_Y \tag{28}$$

Dividieren und auflösen:

$$\frac{\alpha X^{\alpha-1}Y^{\beta}}{\beta X^{\alpha}Y^{\beta-1}} = \frac{\lambda P_X}{\lambda P_Y} \tag{29}$$

$$\frac{\alpha Y^{\beta}Y^{1-\beta}}{\beta X^{\alpha}X^{1-\alpha}} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{30}$$

$$\frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{31}$$

$$Y = \frac{\beta P_X}{\alpha P_Y} \cdot X \tag{32}$$

In Budgetbeschränkung einsetzen und auflösen:

$$
\begin{aligned}
M - P_X X - P_Y Y &= 0 && (33)\\
M - P_X X - P_Y \cdot \frac{\beta P_X}{\alpha P_Y} \cdot X &= 0 && (34)\\
M - P_X X - \frac{\beta P_X}{\alpha} \cdot X &= 0 && (35)\\
M &= P_X X + \frac{\beta P_X}{\alpha} \cdot X && (36)\\
M &= X \cdot \left[P_X + \frac{\beta P_X}{\alpha} \right] && (37)\\
M &= X \cdot \left[\frac{\alpha P_X + \beta P_X}{\alpha} \right] && (38)\\
M &= X \cdot \left[\frac{P_X(\alpha + \beta)}{\alpha} \right] && (39)\\
X^* &= \frac{\alpha M}{P_X(\alpha + \beta)} && (40)
\end{aligned}
$$

In Zwischenschritt (32) einsetzen und nach Y auflösen:

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{\beta P_X}{\alpha P_Y} \cdot X && (41)\\
Y &= \frac{\beta P_X}{\alpha P_Y} \cdot \frac{\alpha M}{P_X(\alpha + \beta)} && (42)\\
Y^* &= \frac{\beta M}{P_Y(\alpha + \beta)} && (43)
\end{aligned}
$$