HICKS'SCHE NACHFRAGE

$$\mathcal{L} = 2A + 8B + \lambda \cdot (6 - A^{\alpha} B^{1-\alpha})$$

3. Schritt: Partiell nach Gütern ableiten und gleich 0 setzen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = 2 - \lambda \alpha A^{\alpha-1} B^{1-\alpha} = 0 \qquad \Rightarrow 2 = \lambda \alpha A^{\alpha-1} B^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} = 8 - \lambda (1-\alpha) A^{\alpha} B^{-\alpha} = 0 \qquad \Rightarrow 8 = \lambda (1-\alpha) A^{\alpha} B^{-\alpha}$$

ALLE HERLEITUNGS-SCHRITTE

Ausgabenminimierung:

- Preis eines Apfels $A \Rightarrow P_A$
- Preis einer Flasche Bier $B \Rightarrow P_B$

$\Rightarrow$ **Wähle A und B so, dass die Ausgaben $P_A \cdot A + P_B \cdot B$ minimiert sind...**

unter der Nebenbedingung:

- Unterschiedliche Kombinationen aus Äpfeln (A) und Bier (B) möglich
- Nutzenfunktion $U(A, B)$ „bewertet" verschiedene Kombinationen

$\Rightarrow$ **sodass gleichzeitig der Nutzen $U(A, B)$ mindestens $\overline{U}$ beträgt.**

Wichtig!

Bei der **Ausgabenminimierung** spielt unser Einkommen (Budget) keine Rolle. Wir überprüfen nicht, ob wir uns die ausgabenminimierende Güterkombination auch leisten können!

Optimierungsproblem

Finde die Kombination aus A und B, die die **Ausgaben minimiert** und zugleich die **Nebenbedingung erfüllt**.

$$\min_{A,B} P_A A + P_B B \text{ u.d.Nb } U(A,B) = \overline{U}$$

Lösung eines Optimierungsproblems mit Nebenbedingung $\Rightarrow$ **Lagrange!**

Unser Plan:

- Ausgabenminimierung mit **Zahlenbeispiel**: $U(A,B) = A^{\alpha} B^{1-\alpha}$
- Rezept Ausgabenminimierung mit **allgemeiner Nutzenfunktion** $U(A,B)$

Optimierungsproblem:

$$\min_{A,B} P_A A + P_B B \text{ u.d.Nb. } U(A,B) = \overline{U}$$

- Preise: $P_A = 2$, $P_B = 8$
- Nutzenfunktion, zu erreichender Nutzen: $U(A,B) = A^\alpha B^{1-\alpha}$, $\overline{U} = 6$

1. Schritt: Nebenbedingung nach 0 auflösen, ggf. Zahlen einsetzen:

$$\overline{U} - A^\alpha B^{1-\alpha} = 0$$

$$6 - A^\alpha B^{1-\alpha} = 0$$

2. Schritt: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$\mathcal{L} = \text{Ausgaben} + \lambda \cdot (\text{aufgelöste Nebenbedingung})$$

$$\mathcal{L} = 2A + 8B + \lambda \cdot (6 - A^\alpha B^{1-\alpha})$$

$$\mathcal{L} = 2A + 8B + \lambda \cdot (6 - A^{\alpha} B^{1-\alpha})$$

3. Schritt: Partiell nach Gütern ableiten und gleich 0 setzen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = 2 - \lambda \alpha A^{\alpha-1} B^{1-\alpha} = 0 \qquad \Rightarrow 2 = \lambda \alpha A^{\alpha-1} B^{1-\alpha} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} = 8 - \lambda (1-\alpha) A^{\alpha} B^{-\alpha} = 0 \qquad \Rightarrow 8 = \lambda (1-\alpha) A^{\alpha} B^{-\alpha} \qquad (2)$$

4. Schritt: (1) durch (2) dividieren und nach A oder B auflösen:

$$\frac{2}{8} = \frac{\lambda \alpha A^{\alpha-1} B^{1-\alpha}}{\lambda (1-\alpha) A^{\alpha} B^{-\alpha}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\alpha B^{1-\alpha} B^{\alpha}}{(1-\alpha) A^{\alpha} A^{1-\alpha}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\alpha B}{(1-\alpha) A} \qquad \Rightarrow B = \frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \cdot A$$

$$B = \frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \cdot A \tag{3}$$

5. Schritt: Ergebnis in **Nebenbedingung** einsetzen und auflösen:

$$
\begin{aligned}
6 - A^{\alpha} B^{1-\alpha} &= 0 \\
6 - A^{\alpha} \left[\frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \cdot A \right]^{1-\alpha} &= 0 \\
6 - A \left[\frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \right]^{1-\alpha} &= 0 \\
6 &= A \left[\frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \right]^{1-\alpha} \\
6 \cdot \left[\frac{4\alpha}{(1-\alpha)} \right]^{1-\alpha} &= A^{*}
\end{aligned}
$$

$$A^* = 6 \cdot \left[\frac{4\alpha}{(1-\alpha)}\right]^{1-\alpha}$$

6. Schritt: Optimale Menge von A^* in Zwischenschritt (3) einsetzen:

$$B = \frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \cdot A \tag{3}$$

$$B = \frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \cdot 6 \cdot \left[\frac{4\alpha}{(1-\alpha)}\right]^{1-\alpha}$$

$$B = (1-\alpha)^1 (4\alpha)^{-1} \cdot 6 \cdot (4\alpha)^{1-\alpha} (1-\alpha)^{-(1-\alpha)}$$

$$B = 6 \cdot (1-\alpha)^{\alpha} \cdot (4\alpha)^{-\alpha}$$

$$B^* = 6 \cdot \left[\frac{(1-\alpha)}{4\alpha}\right]^{\alpha}$$

Zusammenfassung:
Konsumentin mit $U(A,B) = A^{\alpha}B^{1-\alpha}$, $P_A = 2$, $P_B = 8$ und einem Nutzenziel von $\overline{U} = 6$ minimiert ihre Ausgaben für

$$
\begin{aligned}
A^* &= 6 \cdot \left[\frac{4\alpha}{(1-\alpha)}\right]^{1-\alpha} \\
B^* &= 6 \cdot \left[\frac{(1-\alpha)}{4\alpha}\right]^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Zahlenbeispiel:
$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow U(A,B) = A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} = \sqrt{AB} \Rightarrow A^* = 12, B^* = 3$

Gesamte Ausgaben:
$E = P_A A^* + P_B B^* = 2 \cdot 12 + 8 \cdot 3 = 48$

Dualität ($\Rightarrow$ extra Video!)

Ausgabenminimierung: $P_A = 2,\ P_B = 8,\ \overline{U} = 6 \quad \Rightarrow A^* = 12,\ B^* = 3,\ E = 48$
Nutzenmaximierung: $P_A = 2,\ P_B = 8,\ M = 48 \quad \Rightarrow A^* = 12,\ B^* = 3,\ V = 6$

Anleitung: $\min_{A,B} P_A A + P_B B$ u.d.Nb. $U(A,B) = \overline{U}$

1. **Nebenbedingung nach 0 auflösen** $\Rightarrow \overline{U} - U(A,B) = 0$
2. **Lagrange-Funktion** aufstellen $\Rightarrow \mathcal{L} = P_A A + P_B B + \lambda \cdot [\overline{U} - U(A,B)]$
3. Partiell nach Gütern A und B **ableiten** und gleich 0 setzen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} &= P_A - \lambda \cdot \frac{\partial U}{\partial A} = 0 \quad \Rightarrow \lambda \cdot \frac{\partial U}{\partial A} = P_A \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} &= P_B - \lambda \cdot \frac{\partial U}{\partial B} = 0 \quad \Rightarrow \lambda \cdot \frac{\partial U}{\partial B} = P_B\end{aligned}$$

4. Erste durch zweite Gleichung **dividieren** und nach B **auflösen**

$$\underbrace{\frac{\frac{\partial U}{\partial A}}{\frac{\partial U}{\partial B}}}_{\text{GRS}} = \frac{P_A}{P_B} \qquad \Rightarrow B = \ldots \cdot A$$

5. B in **Nebenbedingung** einsetzen und nach A^* **auflösen**

$$U(A,B) = \overline{U} \qquad \Rightarrow A^*$$

6. A^* wieder **in Zwischenschritt einsetzen** und B^* erhalten

$$B = \ldots \cdot A \qquad \Rightarrow B^*$$