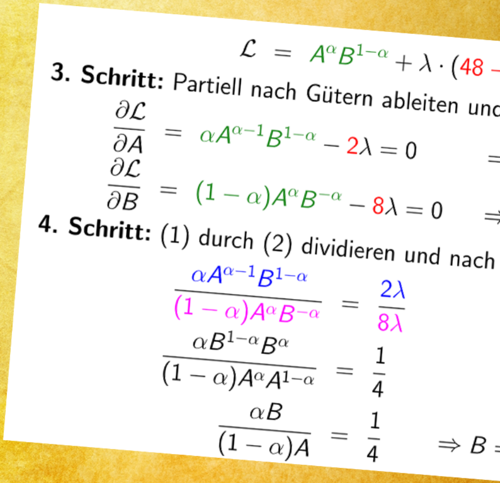
LAGRANGE

ALLE LÖSUNGS-SCHRITTE



$$\mathcal{L} = A^{\alpha}B^{1-\alpha} + \lambda \cdot (48 -$$

3. Schritt: Partiell nach Gütern ableiten und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = \alpha A^{\alpha-1}B^{1-\alpha} - 2\lambda = 0 \qquad =$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} = (1-\alpha)A^{\alpha}B^{-\alpha} - 8\lambda = 0 \qquad \Rightarrow$$

4. Schritt: (1) durch (2) dividieren und nach

$$\frac{\alpha A^{\alpha-1}B^{1-\alpha}}{(1-\alpha)A^{\alpha}B^{-\alpha}} = \frac{2\lambda}{8\lambda}$$

$$\frac{\alpha B^{1-\alpha}B^{\alpha}}{(1-\alpha)A^{\alpha}A^{1-\alpha}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\alpha B}{(1-\alpha)A} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow B =$$

Nutzenmaximierung...

- Unterschiedliche Kombinationen aus Äpfeln (A) und Bier (B)
- Nutzenfunktion $U(A, B)$ „bewertet“ verschiedene Kombinationen

$\Rightarrow$ **Wähle A und B so, dass $U(A, B)$ maximiert wird...**

mit Nebenbedingung:

- Festes Budget (Einkommen) $\Rightarrow M$
- Preis eines Apfels $\Rightarrow P_A$
- Preis einer Flasche Bier $\Rightarrow P_B$

$\Rightarrow$ **unter der Nebenbedingung, dass $P_A \cdot A + P_B \cdot B = M$**

Optimierungsproblem

Finde die Kombination aus A und B, die den Nutzen maximiert und zugleich die Nebenbedingung erfüllt.

$$\max_{A,B} U(A, B) \text{ u.d.Nb } P_A A + P_B B = M$$

Lösung eines Optimierungsproblems mit Nebenbedingung $\Rightarrow$ **Lagrange!**

Unser Plan:

- Nutzenmaximierung mit Beispiel: $U(A, B) = A^{\alpha} B^{1-\alpha}$
- Nutzenmaximierung mit allgemeiner Nutzenfunktion $U(A, B)$
- Kurzanleitung Nutzenmaximierung

$$\max_{A,B} U(A,B) \text{ u.d.Nb } P_A A + P_B B = M$$

- Nutzenfunktion: $U(A,B) = A^{\alpha} B^{1-\alpha}$
- Preise und Budget: $P_A = 2$, $P_B = 8$, $M = 48$

1. Schritt: Budgetbeschränkung nach 0 auflösen, ggf. Preise einsetzen:

$$M - P_A A - P_B B = 0$$
$$48 - 2A - 8B = 0$$

2. Schritt: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$\mathcal{L} = \text{Nutzenfunktion} + \lambda \cdot (\text{aufgelöste Nebenbedingung})$$
$$\mathcal{L} = A^{\alpha} B^{1-\alpha} + \lambda \cdot (48 - 2A - 8B)$$

Lagrange-Multiplikator λ

Der Lagrange-Multiplikator λ sagt, um wie viel sich die **Zielfunktion** (= Nutzen) verändert, wenn wir die **Nebenbedingung** (= Budget) um eine (marginale) Einheit lockern.

$$\mathcal{L} = A^{\alpha}B^{1-\alpha} + \lambda \cdot (48 - 2A - 8B)$$

3. Schritt: Partiell nach Gütern ableiten und gleich 0 setzen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = \alpha A^{\alpha-1}B^{1-\alpha} - 2\lambda = 0 \qquad \Rightarrow \alpha A^{\alpha-1}B^{1-\alpha} = 2\lambda \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} = (1-\alpha)A^{\alpha}B^{-\alpha} - 8\lambda = 0 \qquad \Rightarrow (1-\alpha)A^{\alpha}B^{-\alpha} = 8\lambda \qquad (2)$$

4. Schritt: (1) durch (2) dividieren und nach A oder B auflösen:

$$\frac{\alpha A^{\alpha-1}B^{1-\alpha}}{(1-\alpha)A^{\alpha}B^{-\alpha}} = \frac{2\lambda}{8\lambda}$$

$$\frac{\alpha B^{1-\alpha}B^{\alpha}}{(1-\alpha)A^{\alpha}A^{1-\alpha}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\alpha B}{(1-\alpha)A} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow B = \frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \cdot A$$

$$B = \frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \cdot A \tag{3}$$

5. Schritt: Ergebnis in Budgetbeschränkung einsetzen und auflösen:

$$\begin{aligned}
48 - 2A - 8B &= 0 \\
48 - 2A - 8 \cdot \left[\frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \cdot A\right] &= 0 \\
48 - 2A - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \cdot A &= 0 \\
48 &= 2A + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \cdot A \\
48 &= A\left[2 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\right] \\
48 &= A\left[\frac{2\alpha + 2 - 2\alpha}{\alpha}\right] \Rightarrow A^* = 24\alpha
\end{aligned}$$

$$A^* = 24\alpha$$

6. Schritt: Optimale Menge von A^* in Zwischenschritt (3) einsetzen:

$$\begin{aligned} B &= \frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \cdot A && (3) \\ B &= \frac{(1-\alpha)}{4\alpha} \cdot 24\alpha \\ B^* &= 6(1-\alpha) \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

Konsumentin mit $U(A,B) = A^\alpha B^{1-\alpha}$, $M = 48$, $P_A = 2$ und $P_B = 8$ maximiert ihren Nutzen für $A^* = 24\alpha$ und $B^* = 6(1-\alpha)$

Zahlenbeispiel:

$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow U(A,B) = A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} = \sqrt{AB} \Rightarrow A^* = 12, B^* = 3$

Anleitung: $\max_{A,B} U(A,B)$ u.d.Nb $P_A A + P_B B = M$

1. Budgetbeschränkung nach 0 auflösen $\Rightarrow M - P_A A - P_B B = 0$
2. Lagrange-Funktion aufstellen $\Rightarrow \mathcal{L} = U(A,B) + \lambda \cdot (M - P_A A - P_B B)$
3. Partiell nach Gütern A und B ableiten und gleich 0 setzen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial A} - \lambda P_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial A} = \lambda P_A$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} = \frac{\partial U}{\partial B} - \lambda P_B = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial B} = \lambda P_B$$

4. Erste durch zweite Gleichung dividieren und nach B auflösen

$$\underbrace{\frac{\frac{\partial U}{\partial A}}{\frac{\partial U}{\partial B}}}_{\text{GRS}} = \frac{P_A}{P_B} \qquad \Rightarrow B = \ldots \cdot A$$

5. B in Budgetbeschränkung einsetzen und nach A^* auflösen

$$P_A A + P_B B = M \qquad \Rightarrow A^*$$

6. A^* wieder in Zwischenschritt einsetzen und B^* erhalten

$$B = \ldots \cdot A \qquad \Rightarrow B^*$$